

SAMBA: EIN SELBSTKALIBRIERENDES FEHLER-SYSTEM FÜR DIE ERMITTLUNG EINER OPTIMIERTEN PROGNOSEGANGLINIE UND IHRES STREUBEBEREICHES

Raimundo Nonato de ANDRADE-LEAL, Ulrike DRABEK, Robert KIRNBAUER
Institut für Hydraulik, Gewässerkunde und Wasserwirtschaft/Technische Universität Wien,
Karlsplatz 13 A-1040 Wien

Raimundo-Nonato.Andrade-Leal@ba-ca.com, drabek@hydro.tuwien.ac.at,
kirnbauer@hydro.tuwien.ac.at

Zusammenfassung: Als Grundlage für die Optimierung des Kraftwerkseinsatzes an österreichischen Fließgewässern wurden mehrere Prognosemodelle unterschiedlicher Struktur und zeitlicher Diskretisierung, sowie unterschiedlicher Prognosefristen entwickelt. Diese Modelle liefern je nach Prognosepegel, nach Prognosefrist und nach hydrologischer Situation unterschiedlich gute Prognosen. Für den operationellen Betrieb erwartet der Anwender lediglich eine einzige Prognoseganglinie mit einer Unsicherheitsangabe. Mit dem in diesem Artikel beschriebenen, neu entwickelten Modul zur Prognosenoptimierung („SAMBA“) wird dieser Forderung Rechnung getragen. In der vorliegenden Form stellt SAMBA die optimierte Prognose als eine Linearkombination der jeweils zur Verfügung stehenden Einzelmodelle dar.

Schlüsselworte: Optimierung, Durchflussprognosesystem, Linearkombination von Modellen, Fehlersystem, Hilberträume

SAMBA: A SELF-CALIBRATING ERROR CONTROL SYSTEM

Abstract: To provide a basis for optimising the net schedule of hydro power plants at the Austrian Danube several forecasting models with different structure and time-step have been developed. The accuracy of these models depends on the forecasting station, the lead-time and the hydrological situation. The need of the user is to have one single forecast value and its respective uncertainty. In this article we present the newly developed module SAMBA which combines different results of forecasting models to one single optimised forecast. SAMBA calculates a probability weighted linear combination of all available forecasts.

Keywords: Optimisation, Discharge forecasting system, linear combination, error system, Hilbert spaces

1. Problemdefinition und mathematische Grundideen der Lösungsansätze

Im Auftrag des österreichischen Energieerzeugungsunternehmens Verbund, das an der Donau 9 Wasserkraftwerke betreibt, wurde zur besseren Abschätzung der zu erwartenden Durchflüsse ein operationelles Durchflussprognosesystem entwickelt. Das System setzt sich aus mehreren Modellen zusammen, die Prognosen für unterschiedliche Zeiträume (36 Stunden bis 4 Tage im Voraus) und in unterschiedlicher zeitlicher Diskretisierung (1 Stunde bis 1 Tag) berechnen. Während des Prognoseverlaufes werden für jeden Zeitpunkt bis zu 40 Prognosen als Ergebnisse der unterschiedlichen Modelle berechnet. Diese Modelle liefern je nach Prognosepegel, nach Prognosefrist und nach hydrologischer Situation unterschiedlich gute Prognosen. Zur Definition des Begriffs hydrologische Situation siehe Blöschl, G., Merz, R. (1999). Für den Echtzeitbetrieb sollte jenes Modellergebnis bzw. jene Kombination von Modellergebnissen (Erwartungswert und Vertrauensbereich) als Basis für die Betriebsführung weitergegeben werden, das unter den gegebenen Bedingungen die besten Prognosen liefert.

Das beschriebene Problem stellt sich mathematisch gesehen als ein Optimierungsproblem über einen multidimensionalen Parameterraum mit sehr vielen Dimensionen dar. Hinzu kommt, dass sowohl die Eingangs- als auch die Kontrollwerte des Systems, nämlich Niederschläge, Temperaturen und Durchflüsse, mit unterschiedlichen Unschärfen behaftet sind. Daher ist die exakte mathematische Berechnung des Problems außerordentlich kompliziert. Nähere Ausführungen zu dem Thema siehe Becker, H. (1991) und Hartwig, G. (1967).

In der vorliegenden Arbeit wird dargestellt, wie durch eine Simulation das beschriebene Problem vereinfacht gelöst werden kann. Ein selbstkalibrierendes Fehler-System nähert die optimierte Prognose an. Diese wird als eine mit Wahrscheinlichkeitsmatrizen gewichtete Linearkombination der zur Verfügung stehenden Modelle dargestellt. Zur Schätzung der Wahrscheinlichkeitsmatrizen dient ein Bewertungssystem, das durch eine statistische Auswertung der Richtigkeit der Vorhersagen der unterschiedlichen Modelle in der Vergangenheit aufgebaut wird. Dieses selbstkalibrierende Fehler-System erlaubt eine flexible Anzahl von Modellen, was jederzeit die Inklusion eines neuen Modells oder einer neuen Modellvariante in das Bewertungssystem ermöglicht. Auch in anderer Hinsicht ist das System sehr flexibel: Die Fehler der einzelnen Modelle können jeweils individuell unterschiedlich bewertet werden, und für jedes Modell können unterschiedliche Prognosefristen, Messungen und die Anzahl der Prognosen pro Tag in das Bewertungssystem Eingang finden. Die Prognosen müssen lediglich auf dieselbe Zeitskala gebracht werden.

In dieser vereinfachten Form kann das Problem mit zwei unterschiedlichen Methoden gelöst werden, einmal als iteratives Verfahren, einmal als Diskretisierungsverfahren. Für beide Methoden wurden erste statistische Auswertungen der Modellfehler mit MS-ACCESS gemacht, die zweite Methode wurde als FORTRAN-Programm „OPTIMAL“ implementiert unter Verwendung vom Kuester, J., Mize, J. (1973).

Das Problem kann man grundsätzlich mit Hilfe eines Orthogonalisierungsverfahrens lösen, vergleiche Balakrishnan, A. (1976), Heuser, H. (1992) und Kaiser, H. (1993). Im speziellen Fall wird eine Lösung nur dann als brauchbar betrachtet, wenn die Summe aller Wahrscheinlichkeitsmatrizen die Einheitsmatrix ergibt und wenn alle Elemente der Wahrscheinlichkeitsmatrizen im geschlossenen Intervall zwischen Null und Eins liegen. Dadurch wird gewährleistet, dass nach einer Plausibilitätsprüfung der einzelnen Modellergebnisse das Optimierungsverfahren nicht in unplausible Bereiche des Lösungsraumes extrapolieren kann. Auf der anderen Seite bedingt dies, dass nicht alle systematischen Fehler der Modelle im Zuge der Optimierung korrigiert werden können.

2. Darstellung der Methode an einem einfachen Fall

Die Methode lässt sich am konkreten Beispiel der ungeglätteten bzw. der geglätteten Wellenablaufprognose (WL bzw. WG) mit dem Modell HYSIM (siehe Gutknecht, D., et al. (1990) und Schnatter, S. (1988)) demonstrieren. Betrachten wir die Situation A in Abb. 1, dann liegt die optimale Linearkombination OPT der Ergebnisse von WL bzw. WG dort, wo die Orthogonale zur Verbindung von WL und WG durch den Beobachtungspunkt (bzw. –vektor) BEO geht (daher Orthogonalisierungsverfahren). Im rechten Teil der Abb. 1 sind die „Fehler“ (bzw. ihre Bewertung) über diskreten Werten des Gewichtungsfaktors von WG bzw. WL aufgetragen. Abb. 2 zeigt das Modellverhalten für den Fall B, wenn weder WL noch WG ganz in die Nähe von BEO kommen. In diesem Fall wählt das Optimierungsmodell die Kombination, die dem Optimum „relativ“ am nächsten kommt, also das Modell WL allein.

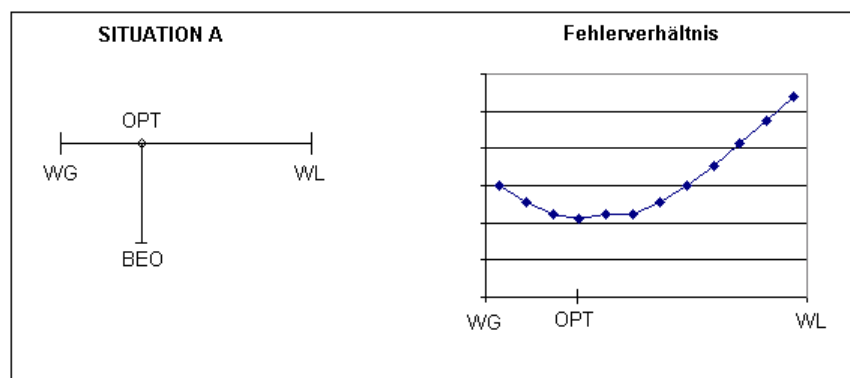


Abbildung 1: Situation A mit dem zugehörigen Fehlerverhältnis (Bezeichnungen siehe Text)

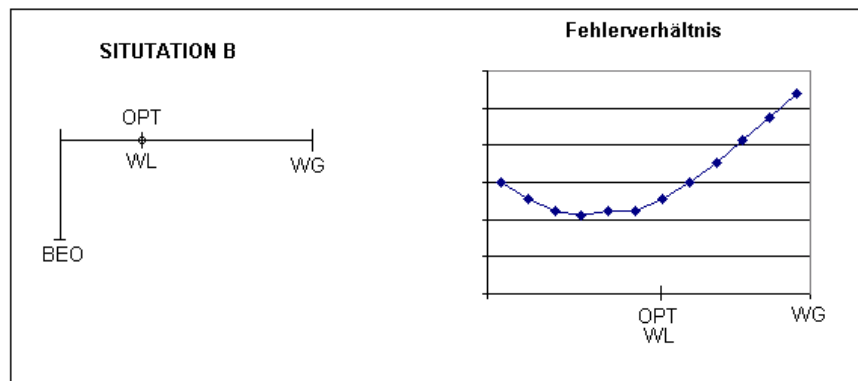


Abbildung 2: Situation B mit dem zugehörigen Fehlerverhältnis (Bezeichnungen siehe Text)

In der Abb. 3 wird die Fehlerkenngröße für unterschiedliche Prognosefristen am Pegel des Kraftwerkes Ybbs über diskreten Gewichtungsfaktoren der Modelle WL bzw. WG aufgetragen. Der erste Punkt links bedeutet alleinige (100%) Verwendung von WL, der letzte rechts 100% WG, dazwischen wird mit Schritten von 0,1 diskretisiert. Als Basis für die Fehlerbestimmung wurde der Zeitraum Jänner bis April 2000 verwendet. Abb. 4 zeigt den Wert der Wahrscheinlichkeitsmatrix (des Gewichtungsfaktors) für das Modell WG in Abhängigkeit von der Prognosefrist.

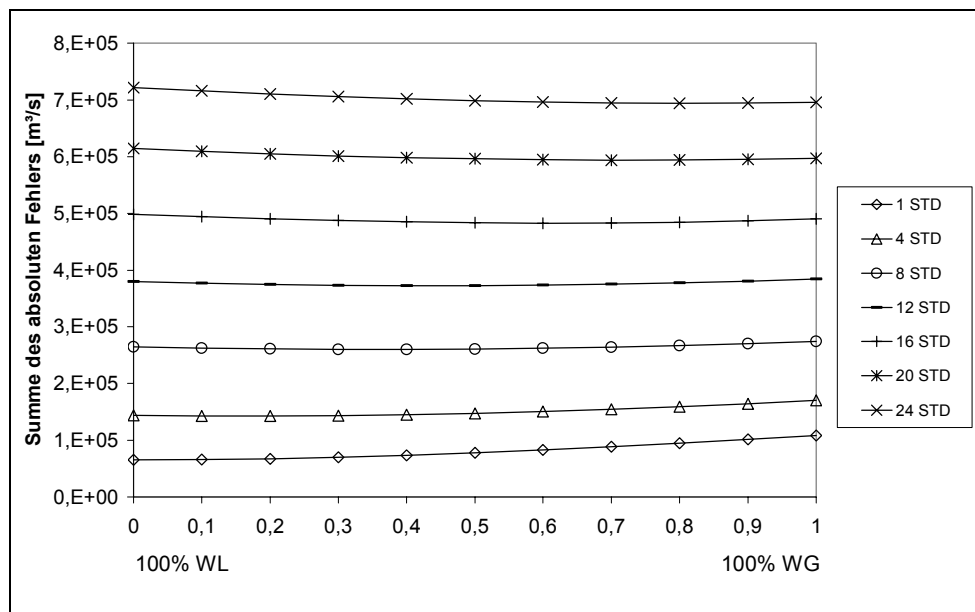


Abbildung 3: Fehlerverhältnis der Modelle WL und WG

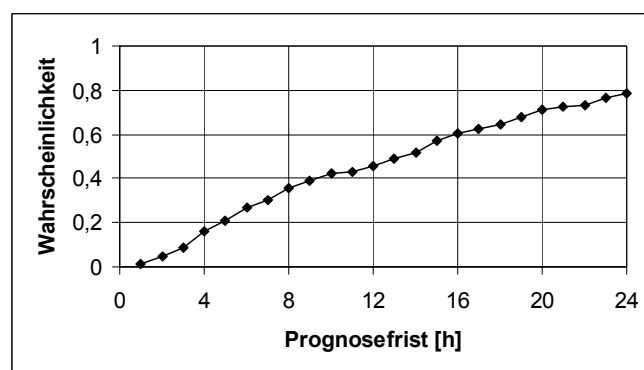


Abbildung 4: Veränderung der Wahrscheinlichkeitsmatrix für das Modell WG

3. Voraussetzungen des Optimierungsverfahrens

Das dargestellte Optimierungsverfahren baut auf folgenden Voraussetzungen auf:

- Die Grundmenge der Vorhersagen jedes Modells und der gemessenen Werte ist so groß, dass die relative Häufigkeit und die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleichgesetzt werden können.
- Die optimale Prognose lässt sich als Linearkombination aller vorhandenen Prognosen darstellen. Hierzu gelte:
Seien P_1, P_2, P_3 Prognosevektoren, die zum gleichen Zeitpunkt mit den Modellen M_1, M_2, M_3 , ermittelt wurden, dann gilt für die optimale Prognose P_0 : $P_0 = w_1 P_1 + w_2 P_2 + w_3 P_3$, wobei w_i die Wahrscheinlichkeitsmatrix ist, dass M_i die richtige Prognose liefert.
- Die Fehler der einzelnen Modelle werden streng gesondert nach unterschiedlichen Kriterien bestimmt und gespeichert, nämlich nach Prognosepegel und –frist. (In einer ausgeweiteten Modellversion ist auch eine Unterscheidung nach Wettersituationen z. Zt. der Prognoseerstellung geplant.)
- Die Fehler können mit Gewichtungsfaktoren bewertet werden. Als solche Gewichtungsfaktoren sind möglich: Bewertungen der hydrologischen Situation, der Energieerzeugung, der Tarif- und Kostensituation, ...
Über- oder Unterschätzungen des Beobachtungsvektors durch den Prognosevektor können unterschiedlich bewertet werden,
jedes der vorhandenen Modelle kann unterschiedlich bewertet werden.
Der Bewertungsfaktor ist absolut entscheidend für das Ergebnis der Optimierungsmethode.
- Alle Modellergebnisse müssen sich auf dieselben Zeitpunkte beziehen, um vergleichbar zu sein.

Im vorliegenden Anwendungsfall standen zwei Modellgruppen mit unterschiedlicher Zeitdiskretisierung zur Verfügung: Tagesmittelwertprognosen und Stundenwertprognosen des Durchflusses. Diese mussten vereinheitlicht werden. Hierzu wurde die Prognoseganglinie der Tagesmittel mit einer vereinfachten Variante einer kubischen Spline-Interpolation durch ein Polynom dritten Grades approximiert, wobei die Lagrange'sche Darstellung für Polynome verwendet wurde (Berens, H. (1968) und Weisstein, E. (1998)). Das vereinfachte Verfahren führt auf eine stetige, aber nicht stetig differenzierbare Funktion.

4. Möglichkeiten des Fehler-Bewertungssystems

Abb. 5 zeigt am Beispiel des Kraftwerkes Ybbs die Abhängigkeit der Wirkleistung von der Wasserführung. Aus energiewirtschaftlichen Gründen kann das Betriebsoptimum für das Kraftwerk bei unterschiedlichen Werten der Wasserführung liegen. Daraus ergibt sich eine jeweils andere Bewertung der Vorhersagefehler. In Abb. 6 sind die Verläufe der Multiplikatoren für die Fehlerbewertung als Funktion des Durchflusses unter Annahme von zwei verschiedenen Betriebszuständen (3500 bzw. 500 m³/s) aufgezeichnet. Beispielsweise ergibt sich für einen Betriebszustand von 500 m³/s, dass Vorhersagefehler im Bereich von ca. 2000 bis 5000 m³/s mit nur geringem Gewicht bewertet werden müssen, dass also Fehlprognosen in diesem Durchflussbereich wesentlich weniger schwerwiegend sind als solche bei ganz kleinen bzw. bei ganz großen Durchflüssen.

In ähnlicher Weise könnten auch Über- oder Unterschätzungen des tatsächlichen Durchflusses unterschiedlich gewichtet werden: Wenn eine Unterschätzung z. B. störender für den Betrieb wäre als eine Überschätzung, dann könnte etwa ein Unterschätzungsfehler mit dem Doppelten des Überschätzungsfehlers gewichtet werden.

Durch das Fehler-Bewertungssystem wird das Optimierungsverfahren außerordentlich flexibel und an die Ansprüche des Nutzers besonders gut anpassbar.

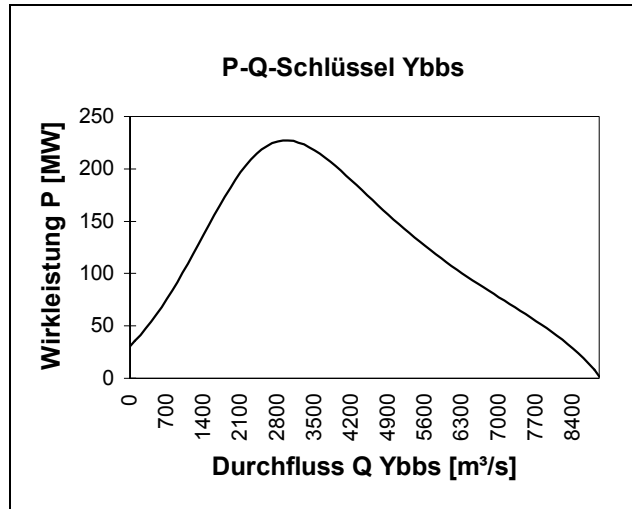


Abbildung 5: Zusammenhang zwischen Durchfluss und Leistung eines Kraftwerkes

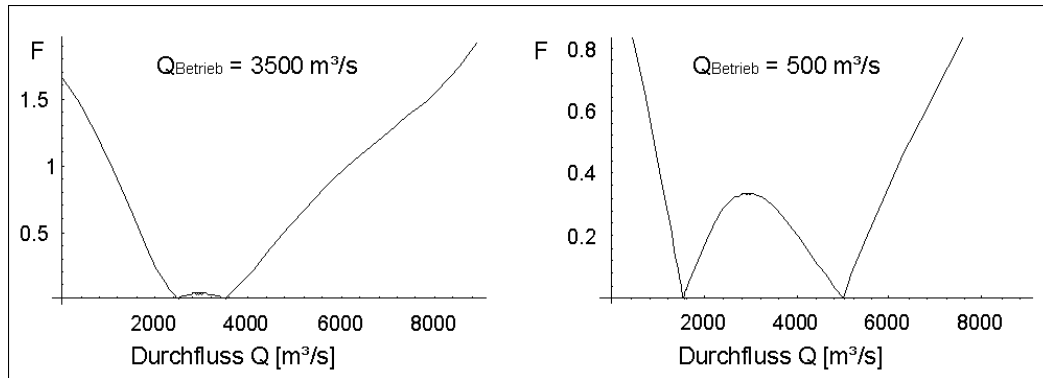


Abbildung 6: Multiplikator F zur Fehlerbewertung in Hinblick auf die Energieerzeugung bei unterschiedlichen Betriebszuständen

5. Mathematische Modellierung

Das Problem besteht darin, aus mehreren Prognosevarianten eine optimierte Prognose aufzubauen. Die Kriterien für den Optimierungsvorgang müssen natürlich vordefiniert werden. Bei dem vorgeschlagenen Modell wird eine lineare Kombination der Prognosevarianten aufgebaut. Das Ziel dieses Modells ist nicht ein neues hydrologisches Modell zu erstellen, das heißt, systematische Fehler werden nicht ausgebessert.

Sei M_i ($i=1, \dots, n$) n Prognosevarianten (oder Modelle). Das Modell $M_i = \{P_1^i, P_2^i, P_3^i, \dots, P_k^i\}$ wo P_t^i ist ein s -dimensionaler Prognosevektor für den Zeitpunkt t

$B = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_k\}$ wo B_t ist der Beobachtungsvektor für den Zeitpunkt t .

Gegeben seien auch für den Zeitpunkt $k+1$ die Prognosevektoren $P_{k+1}^1, P_{k+1}^2, P_{k+1}^3, \dots, P_{k+1}^n$. Das Ziel ist die Berechnung eines Prognosevektors P_{k+1}^0 , der am wahrscheinlichsten den unbekannten Vektor B_{k+1} prognostiziert.

Es sei H der Raum aller möglicher Modelle, dass heißt H ist die Menge von allen k -Tupel s -dimensionalen Vektoren über $\mathfrak{R}$. Man definiert für diesen Raum die folgende Funktion $f: H \times H \rightarrow \mathfrak{R}$

$$f(M_1, M_2) := \sum_{i=1}^k \langle P_i^1, P_i^2 \rangle \quad (4)$$

Wo $\langle P_1, P_2 \rangle$ das Euklidische innere Produkt von P_1 und P_2 ist, $\langle \cdot \rangle: \mathfrak{R}^s \times \mathfrak{R}^s \rightarrow \mathfrak{R}$.

$$N(M) := \sqrt{f(M, M)} \quad (5)$$

Satz 1: N definiert eine Norm in H über $\mathfrak{R}$. (Beweis: siehe in Eigenthaler, G. (1996) – Seite 87 – 89.)

Satz 2: H ist ein Hilbertraum mit f als inneres Produkt. (Beweis: siehe in Eigenthaler, G. (1996) – Seite 87 – 89.)

Definition Operation 1: Multiplikation einer skalaren Größe $\alpha \in \mathfrak{R}$ mal ein Modell als : $\mathfrak{R} \times H \rightarrow H$

$$\alpha M := \alpha \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_k\} := \{\alpha P_1, \alpha P_2, \alpha P_3, \dots, \alpha P_k\} \quad (6)$$

Definition Operation 2: Summe zweier Modelle als $+: H \times H \rightarrow H$

$$\begin{aligned} M_1 &= \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_k\} \\ M_2 &= \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$M_1 + M_2 := \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_k\} + \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\} := \{P_1 + S_1, P_2 + S_2, P_3 + S_3, \dots, P_k + S_k\}$$

Die konvexe Menge A

$$\text{Sei } A := \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i M_i \quad , \quad M_i \in H \quad , \quad \alpha_i \in [0,1] \quad \forall i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\} \quad (8)$$

Satz 3: A ist Konvex. Beweis:

$$x, y \in A \Rightarrow$$

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i^x M_i$$

$$y = \sum_{i=1}^k \alpha_i^y M_i$$

$$\beta \in [0,1] \Rightarrow$$

$$\beta x + (1 - \beta)y = \beta \sum_{i=1}^k \alpha_i^x M_i + (1 - \beta) \sum_{i=1}^k \alpha_i^y M_i = \sum_{i=1}^k (\beta \alpha_i^x + (1 - \beta) \alpha_i^y) M_i$$

$$\text{für jedes } i \text{ sei } \delta_i = \max(\alpha_i^x, \alpha_i^y) \text{ und } \varepsilon_i = \min(\alpha_i^x, \alpha_i^y) \Rightarrow \delta_i, \varepsilon_i \in [0,1]$$

$$\Rightarrow 0 \leq \beta \varepsilon_i + (1 - \beta) \varepsilon_i = \varepsilon_i \leq \beta \alpha_i^x + (1 - \beta) \alpha_i^y \leq \beta \delta_i + (1 - \beta) \delta_i = \delta_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^k (\beta \alpha_i^x + (1 - \beta) \alpha_i^y) = \beta \sum_{i=1}^k \alpha_i^x + (1 - \beta) \sum_{i=1}^k \alpha_i^y = \beta + (1 - \beta) = 1 \quad (9)$$

Die Eindeutigkeit der besten Optimierten: Sei A eine nicht leere, abgeschlossene und Konvexe Teilmenge des Hilbertraumes (H, N) und ρ die zu (H, N) gehörige Metrik. Dann gibt es zu jedem $x \in H$ genau ein $y \in A$, sodass gilt:

$$\rho(x, A) = \inf_{m \in A} N(x - m) = N(x - y) \quad (10)$$

Beweis: siehe in Eigenthaler, G. (1996) - Lemma 4.2.4 - Seite 92.

Der Hilbertraum H_p : Sei H_p der k -dimensionale Vektorraum über $\Re$, definiert durch die p -te Komponente des Elementen des Hilbertraums H . H_p ist klarerweise mit dem euklidischen inneren Produkt auch ein Hilbertraum.

$$\text{Sei } A_p := \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i M_i, \quad M_i \in H_p, \quad \alpha_i \in [0,1] \quad \forall i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\} \quad (11)$$

Satz 5: A_p ist eine abgeschlossene und Konvexe Teilmenge von H_p . (Beweis: Analog zu Satz 3.)

Satz 6: Die Eindeutigkeit der zeitbezogenen besten Optimierten

Sei A_p eine nicht leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge des Hilbertraumes $(H_p, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ und ρ die zu $(H_p, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ gehörige Metrik. Dann gibt es zu jedem $x \in H_p$ genau ein $y \in A_p$, sodass gilt:

$$\rho(x, A_p) = \inf_{m \in A_p} \langle x - m, x - m \rangle = \langle x - y, x - y \rangle \quad (12)$$

(Beweis: Analog zu Satz 4.)

Die Faktoren der Linearkombination der besten Optimierten:

$$\begin{aligned} \alpha_i^p \quad i = 1..k \quad p = 1..s \\ y_p \in A_p \\ y_p = \sum_{i=1}^k \alpha_i^p M_i, \quad M_i \in H_p, \quad \alpha_i^p \in [0,1] \quad \forall i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i^p = 1 \\ \rho(B_p, A_p) = \rho(y_p, A_p) \end{aligned} \quad (13)$$

Implementierung:

Wenn $V_1, V_2 \in \Re^s$

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_s^1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V_2 = \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_s^2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

man definiert

$$Dif_+^1(V_1 - V_2) := \begin{pmatrix} \text{Max}(v_1^1 - v_1^2; 0) \\ \text{Max}(v_2^1 - v_2^2; 0) \\ \text{Max}(v_3^1 - v_3^2; 0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{Max}(v_s^1 - v_s^2; 0) \end{pmatrix} \quad Dif_-^1(V_1 - V_2) := Dif_+^1(V_2 - V_1) \quad (15)$$

$$Dif_+^2(V_1 - V_2) := \begin{pmatrix} Max(v_1^1 - v_1^2; 0)^2 \\ Max(v_2^1 - v_2^2; 0)^2 \\ Max(v_3^1 - v_3^2; 0)^2 \\ \vdots \\ Max(v_s^1 - v_s^2; 0)^2 \end{pmatrix} \quad Dif_-^2(V_1 - V_2) := Dif_+^2(V_2 - V_1) \quad (16)$$

$$^+D_1^i = \{Dif_+^1(P_1^i - B_1), Dif_+^1(P_2^i - B_2), Dif_+^1(P_3^i - B_3), \dots, Dif_+^1(P_k^i - B_k)\} \quad (17)$$

$$^-D_1^i = \{Dif_-^1(P_1^i - B_1), Dif_-^1(P_2^i - B_2), Dif_-^1(P_3^i - B_3), \dots, Dif_-^1(P_k^i - B_k)\} \quad (18)$$

$$^+\Delta D_1^i = Dif_+^1(P_1^i - B_1) + Dif_+^1(P_2^i - B_2) + Dif_+^1(P_3^i - B_3) + \dots + Dif_+^1(P_k^i - B_k) \quad (19)$$

$$^-\Delta D_1^i = Dif_-^1(P_1^i - B_1) + Dif_-^1(P_2^i - B_2) + Dif_-^1(P_3^i - B_3) + \dots + Dif_-^1(P_k^i - B_k) \quad (20)$$

$$\Delta D_1^i = ^+\Delta D_1^i + ^-\Delta D_1^i \quad (21)$$

Analog:

$$^+D_2^i = \{Dif_+^2(P_1^i - B_1), Dif_+^2(P_2^i - B_2), Dif_+^2(P_3^i - B_3), \dots, Dif_+^2(P_k^i - B_k)\} \quad (22)$$

$$^-D_2^i = \{Dif_-^2(P_1^i - B_1), Dif_-^2(P_2^i - B_2), Dif_-^2(P_3^i - B_3), \dots, Dif_-^2(P_k^i - B_k)\} \quad (23)$$

$$^+\Delta D_2^i = Dif_+^2(P_1^i - B_1) + Dif_+^2(P_2^i - B_2) + Dif_+^2(P_3^i - B_3) + \dots + Dif_+^2(P_k^i - B_k) \quad (24)$$

$$^-\Delta D_2^i = Dif_-^2(P_1^i - B_1) + Dif_-^2(P_2^i - B_2) + Dif_-^2(P_3^i - B_3) + \dots + Dif_-^2(P_k^i - B_k) \quad (25)$$

$$\Delta D_2^i = ^+\Delta D_2^i + ^-\Delta D_2^i \quad (26)$$

ΔD_1^i und ΔD_2^i haben die Bedeutung eines Normvektors. Siehe Achiezer, N. (1954), Birman, M. (1987), Balakrishnan, A. (1971) und Ossa, E. (1992). Das 5. Element von ΔD_1^i ist, z.B., der Abstand (bezogen auf die erste Norm) von der 5. Stundenfrist des Modells i zu den Beobachtungen. Alle diese Vektoren bilden zusammen die Fehlermatrizen, analog zu dieser Größe wird auch die Häufigkeit der Fehler in der gleichen Vektordarstellung berechnet.

Falls mit der ersten Norm gearbeitet wird, kann aber keine Eindeutigkeit der besten Optimierten behauptet werden. In solchen Fällen wird, da die Eindeutigkeit nicht gegeben ist, das Baryzentrum (vergleichbar dem Schwerpunkt) des optimierten Lösungsraumes gewählt, vergleiche Havlicek, H. (1993).

6. Das Optimierungsverfahren

Zwei Versionen wurden ausprobiert:

6.1. Die erste Version

Bei dieser Version wurde als Ansatz behauptet: *"Die Güte der prognostizierten Varianten ist invers proportional zu den Größen, die man minimieren möchte."* Mit Gütefaktoren (oder ‚Wahrscheinlichkeitsfaktoren‘) bildet man eine lineare Kombination der prognostizierten Modelle. Weiterverbesserungen der gerechneten Prognosevariante können mit einem Iterationsverfahren berechnet werden. Die Konvergenz des Iterationsverfahrens wurde empirisch beobachtet. Das Problem des Verfahrens liegt darin, dass die Kovarianz zwischen Prognosemodellen nicht berücksichtigt wird. Die Konvergenz und die Anzahl der Iterationen zu einem Fixpunkt hängen stark mit dieser Kovarianz zusammen.

6.2. Die zweite Version

Der Hauptpunkt dieser Version ist die Diskretisierung des Problems und der Aufbau eines Optimierungsnetzes. Bei dieser Version spielt die Kovarianz zwischen den Prognosevarianten keine Rolle. Die Teilmenge A des Raumes H wird mit einem gleichverteilten Netz diskretisiert. Für jeden Punkt des Netzes werden Fehlerwerte gerechnet. Der Vorteil dieser Methode ist, dass diese aufgebauten Matrizen akkumulativ

sind. Sei in einer Zeitskala die Punkte $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$ und sei $M(t_0, t_3)$ die Fehlermatrix für den Zeitraum (t_0, t_3) dann, $M(t_0, t_3) = M(t_0, t_1) + M(t_1, t_2) + M(t_2, t_3)$. Die Schrittweite der Diskretisierung muss vordefiniert werden. Diese Schrittweite legt die maximale Anzahl der Gitterpunkte zwischen zwei Prognosevarianten fest. Man soll diese Größe vorsichtig auswählen, die Anzahl der Netzkpunkte kann mittels der Rekursion berechnet werden:

$$A_n^j = \sum_{i=0}^n A_i^{j-1} \quad (27)$$

$$\text{und als Startwerte: } A_n^2 = n + 1 \quad (28)$$

Wobei $n = 1/\text{Schrittweite}$ und $j = \text{Anzahl der Prognosevariante}$.

Von dieser Rekursion leitet man $O(A_n^j) = n^j / 2^j$ ab, siehe Malanowski, K. (1986). (29)

Für jeden Punkt des Netzes wird ein Vektor mit den Faktoren α_i^p gerechnet. Sowohl diese Rekursion als auch die Berechnung des Vektors mit den Faktoren α_i^p (oder auch Wahrscheinlichkeitsmatrizen) wird in die rekursive Subroutine RECHMAT implementiert.

6.3. Die Schätzung der optimalen Faktoren

Die Schätzung der optimalen Faktoren wird in die Subroutine RECFAKWR (unter Einbeziehung der Ergebnisse des Regressionsmodells) und RECHFAKW (ohne Regressionsmodell) gemacht. Die Kurven werden lokal quadratisch interpoliert und das absolute Minimum wird gerechnet. Die quadratische Interpolation wird in jeder Richtung gemacht, ein durchschnittlicher Wert wird berechnet. Die Anzahl von Interpolationen ist

$$l_richtungen = \frac{(i_anzvar)(i_anzvar - 1)}{2}. \text{ Für jede Komponente des Vektors FAKTOREN}$$

werden $i_anzvar - 1$ Berechnungen gemacht, wenn i_anzvar die Anzahl der Prognosevarianten ist. Mehr zu diesem Thema findet man in Agarwal, R. (1993), Collatz, L. (1973) und Collatz, L. (1964).

$$p(x) = \frac{(x - l_wj)(x - l_wjp)l_summ}{2a^2} - \frac{(x - l_wjm)(x - l_wjp)l_sum}{a^2} + \frac{(x - l_wjm)(x - l_wj)l_sump}{2a^2}$$

$$p'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x) \text{ ist max}$$

$$p'(x) = \frac{(x - l_wj + x - l_wjp)l_summ}{2a^2} - \frac{(x - l_wjm + x - l_wjp)l_sum}{a^2} + \frac{(x - l_wjm + x - l_wj)l_sump}{2a^2}$$

$$\Rightarrow x_{\max} = \frac{(l_wj + l_wjp)l_summ - 2(l_wjm + l_wjp)l_sum + (l_wjm + l_wj)l_sump}{(2l_summ - 4l_sum + 2l_sump)}$$

(30)

7. Eine Schätzung für die Varianz

Als Streuungsmaßzahlen könnte man hier idealerweise die Quantilsabstände verwenden, vergleiche Günter, K. (1997). Da deren Berechnung nicht sofort aus den Fehlermatrizen stammen kann, wurden zwei andere Größen gewählt: die durchschnittliche absolute Mittelwertabweichung und die empirische Streuung der Fehler. Für die Schätzung

der Varianz wird immer nach Unterschätzungen und Überschätzungen unterschieden. Die empirische Streuung der Fehler wird aber nicht bezüglich des Mittelwerts der Fehler berechnet, sondern auf den Fehler 0 bezogen.

$$\delta_1 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n |x_i - b_i| \right) \quad (31)$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - b_i)^2 \right)} \quad (32)$$

Diese Größen können mit Hilfe der Vektoren ΔD_1^i und ΔD_2^i berechnet werden. Alle nötigen Informationen für diese Berechnung befinden sich in den Fehlermatrizen.

8. Zusammenfassung und Ausblick

Mit dem hier vorgestellten Modul SAMBA des Zuflussvorhersagesystems des österreichischen Stromerzeugers Verbund können Prognosen aus verschiedenen Modellen mit unterschiedlicher Prognosefrist sowie zeitlicher Diskretisierung zu einer einzigen Vorhersage kombiniert werden, wobei auch eine Angabe über die Unsicherheit der kombinierten Vorhersage gemacht wird. Aus den vorhandenen Prognosemodellen wird eine optimierte Prognose als Linearkombination berechnet. Die Gewichtungsfaktoren werden anhand der Prognosegüte ermittelt, da jedes der Modelle in Abhängigkeit verschiedener Einflussgrößen unterschiedlich gute Prognosen liefert. Zur Zeit wird die Gewichtung nach dem linearen oder quadratischen Durchflussfehler aus dem Kalibrierungszeitraum durchgeführt. Von der Struktur her ist SAMBA geeignet, weitere Optimalitätskriterien zu berücksichtigen. Als solche kommen in Frage: Prognosegüte in Abhängigkeit von der hydrologischen Situation (z.B. Regen auf Schnee, Trockenwetterauslauflinie, Stauniederschläge im Sommer) sowie die Berücksichtigung der Tatsache, dass wegen des nicht linearen Zusammenhanges zwischen Durchfluss und Leistung Prognosefehler in unterschiedlichen Betriebssituationen unterschiedliche Wertigkeit haben.

Mit SAMBA wurde ein flexibles Werkzeug zur Kombination unterschiedlicher Prognosen geschaffen. Die Optimalitätskriterien enthalten hydrologisches, statistisches und energiewirtschaftliches Wissen, wodurch dem Anwender in der aktuellen Vorhersagesituation die Entscheidung über die optimale Vorhersage erleichtert wird.

9. Literatur

- Achiezer, N. (1954): *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*. Akad. Verl., Berlin.
- Agarwal, R. (1993): *Error inequalities in polynomial interpolation and their applications*. Kluwer, Dordrecht.
- Balakrishnan, A. (1971): *Introduction to optimization theory in a Hilbert space*. Springer, Berlin.
- Balakrishnan, A. (1976): *Applied functional analysis*. Springer, Berlin.
- Becker, H. (1991): *Die stochastische Modellierung diagnostischer Unschärfe*. Diss. Dortmund Univ.
- Berens, H. (1968): *Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozessen auf Banachräumen*. Springer, Berlin.
- Birman, M. (1987): *Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space*. Kluwer, Dordrecht.
- Blöschl, G., Merz, R. (1999): *EPV-Zuflußvorhersage – Projektteil Räumliche Analyse der Durchflußentwicklung*. Institut für Hydraulik, Gewässerkunde und Wasserwirtschaft, TU Wien.
- Collatz, L. (1973): *International series of numerical mathematics*. Vortragsauszüge der Tagung über Numerische Methoden bei Optimierungsaufgaben. Mathematischen Forschungsinstitut, Oberwolfach (Schwarzwald).
- Collatz, L. (1964): *Funktional Analysis und Numerische Mathematik*. Springer, Berlin.
- Eigenthaler, G. (1996): *Funktionalanalysis-Vorlesungsskriptum*. TU Wien.
- Günter, K. (1997): *Statistik*. Vieweg, Braunschweig.

- Gutknecht, D., Schnatter, S., Kirnbauer, R., Blöschl, G., Kölbl, Ch. (1990): *Zuflussprognose Obere Drau*. Institut für Hydraulik, Gewässerkunde und Wasserwirtschaft, TU Wien.
- Hartwig, G. (1967): *Einführung in die Fehler- und Ausgleichsrechnung unter Berücks. einiger Überlegungen aus der Mathematischen Statistik*. Hanser, München.
- Havlicek, H. (1993): *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, II*. Vorlesungsskriptum. TU Wien.
- Heuser, H. (1992): *Funktionalanalysis*. Teubner, Stuttgart.
- Kaiser, H. (1993): *Algebra*. TU Wien.
- Kuester, J., Mize, J. (1973): *Optimization techniques with Fortran*. McGraw-Hill, New York.
- Malanowski, K. (1986): *Analysis and algorithms of optimization problems*. Springer, Berlin.
- Ossa, E. (1992): *Topologie*. Vieweg, Braunschweig.
- Schnatter, S. (1988): *Dynamische Bayes'sche Modelle und ihre Anwendung zur hydrologischen Kurzfristvorhersage*. Dissertation, TU Wien.
- Weisstein, E. (1998): *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. CRC Press, New York.